Turkish Studies

Information Technologies and Applied Sciences

Volume 14 Issue 1, 2019, p. 75-82
DOI: 10.7827/TurkishStudies.14946
ISSN: 2667-5633
Skopje/MACEDONIA-Ankara/TURKEY

INTERNATIONAL BALKAN UNIVERSITY
EXCELLENCE FOR THE FUTURE
IBU.EDU.MK

Research Article / Araştırma Makalesi

Article Info/Makale Bilgisi

Received/Geliş: *Şubat 2019* **✓Accepted/Kabul:** *Mart 2019*

Referees/Hakemler: *Doç. Dr. Ayten PEKİN – Dr. Öğr. Üyesi Berna KOŞAR*

This article was checked by iThenticate.

WEAKLY ESSENTIAL G-SUPPLEMENTED MODULES

Celil NEBİYEV[*] - Hasan Hüseyin ÖKTEN[**]

ABSTRACT

In this work weakly essential g-supplemented modules are defined and some properties of these modules are investigated. All modules are associative with unity and all modules are unital left modules. Let N be an R-module. If every essential submodule of N has a weak g-supplement in M, then M is called a *weakly essential g-supplemented* (or briefly *weg-supplemented*) module. Clearly we can see that every weakly g-supplemented module is weakly essential g-supplemented.

Every weakly essential supplemented module is also weakly essential g-supplemented. Because of this weakly essential g-supplemented modules are more generalized than weakly essential supplemented modules. Every (generalized) hollow and every local module are weakly essential g-supplemented. Let N be a weakly essential g-supplemented R-module. If every nonzero submodule of N is essential in N, then N is weakly g-supplemented. It is showed that every factor module and every homomorphic image of a weakly essential g-supplemented module are weakly essential g-supplemented. It is also proved that the finite sum of weakly essential g-supplemented modules is weakly essential g-supplemented. Let N be a weakly essential g-supplemented R-module. Then N/Rad_gN have no proper essential submodules. Let N be a weakly essential g-supplemented R-module. Then every finitely N-generated R-module is weakly essential g-supplemented. Let R be any ring. Then $_RR$ is weakly essential g-supplemented if and only if every finitely generated R-module is weakly essential g-supplemented.

[*] Doç. Dr., Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi, E-posta: cnebiyev@omu.edu.tr

[**] Dr. Öğr. Üyesi, Amasya Üniversitesi, E-posta: hokten@gmail.com

Let N be an R-module. If every essential submodule of N is β_g^* equivalent to an weak g-supplement submodule in N, then N is weakly essential g-supplemented.

STRUCTURED ABSTRACT

In this work weakly essential g-supplemented modules are defined and some properties of these modules are investigated. All modules are associative with unity and all modules are unital left modules. Let N be an R-module. If every essential submodule of N has a weak g-supplement in N, then N is called a weakly *essential g-supplemented* (or briefly *weg-supplemented*) module. Clearly we can see that every weakly g-supplemented module is weakly essential g-supplemented. Because of this weakly essential g-supplemented modules are more generalized than weakly g-supplemented modules. Weakly essential supplemented modules are weakly essential g-supplemented. Because of this weakly essential g-supplemented modules are more generalized than weakly essential supplemented modules. Every (generalized) hollow and every local module are weakly essential g-supplemented. Let N be an R-module and $V \leq N$. If V is a weak g-supplement of an essential submodule in N, then V is called a *weak essential g-supplement* (or briefly *weg-supplement*) submodule in N. Let N be an R-module. If every essential submodule of N is a weak g-supplement in N, then N is weakly essential g-supplemented. By using this we clearly see that if every essential submodule of N is a weak essential g-supplement in N, then N is weakly essential g-supplemented. Let N be a weakly essential g-supplemented R-module. If every nonzero submodule of N is essential in N, then N is weakly g-supplemented. Moreover; N is also weakly supplemented. It is proved that every factor module and every homomorphic image of a weakly essential g-supplemented module are weakly essential g-supplemented. Let N be an R-module, $U \trianglelefteq N$ and $K \leq N$. If K is weakly essential g-supplemented and $U+K$ has a weak g-supplement in N, then U has also a weak g-supplement in N. By using this we show that the finite sum of weakly essential g-supplemented modules is weakly essential g-supplemented. Let N be a weakly essential g-supplemented module. Then N/Rad_gN have no proper essential submodules. Let N be a weakly essential g-supplemented R-module. Then every finitely N-generated R-module is weakly essential g-supplemented. By using this we can prove the following Proposition: 'Let R be any ring. Then $_RR$ is weakly essential g-supplemented if and only if every finitely generated R-module is weakly essential g-supplemented'. Let N be an R-module. If every essential submodule of N is β_g^* equivalent to a weak g-supplement submodule in N, then N is weakly essential g-supplemented. By using this we can give following corollaries:

Corollary: Let N be an R-module. If every essential submodule of N is β^* equivalent to a weak g-supplement submodule in N, then N is weakly essential g-supplemented.

Corollary: Let N be an R-module. If every essential submodule of N lies above a weak g-supplement submodule in N, then N is weakly essential g-supplemented.

Corollary: Let N be an R-module. If every essential submodule of N is β_g^* equivalent to a g-supplement submodule in N, then N is weakly essential g-supplemented.

At the end of this work, we give an example separating with weakly essential g-supplemented and essential g-supplemented modules.

Keywords: Essential Submodules, Small Submodules, Supplemented Modules, G-Supplemented Modules.

2010 Mathematics Subject Classification: 16D10, 16D70.

ZAYIF BÜYÜK G-TÜMLENMİŞ MODÜLLER

ÖZET

Bu çalışmada zayıf büyük g-tümlenmiş modüller tanımlandı ve bu modüllerle ilgili birtakım özellikler incelendi. Bu çalışmada ayrıca bütün halkalar birimli ve bütün modüller de üniter sol modüllerdir. N bir R-modül olsun. Eğer N modülünün her büyük alt modülünün N içinde bir zayıf g-tümleyeni varsa N modülüne bir *zayıf büyük g-tümlenmiş* (veya kısaca *weg-tümlenmiş*) modül denir. Açıkça biz görebiliriz ki her zayıf g-tümlenmiş modül zayıf büyük g-tümlenmiştir. Her zayıf büyük tümlenmiş modül de zayıf büyük g-tümlenmiştir. Bundan dolayı zayıf büyük g-tümlenmiş modüller zayıf büyük tümlenmiş modüllerden daha genel yapıdadırlar. Her (genelleştirilmiş) oyuk ve her lokal modül zayıf büyük g-tümlenmiştir. N bir zayıf büyük g-tümlenmiş R-modül olsun. Eğer N modülünün sıfırdan farklı her alt modülü N modülünde büyükse N modülü zayıf g-tümlenmiştir. Bir zayıf büyük g-tümlenmiş modülün her bölüm modülü ve her homomorfik görüntüsünün de zayıf büyük g-tümlenmiş olduğu gösterildi. Ayrıca zayıf büyük g-tümlenmiş modüllerin sonlu toplamının da zayıf büyük g-tümlenmiş olduğu gösterildi. N bir zayıf büyük g-tümlenmiş modül olsun. Bu durumda N/Rad_gN modülü hiçbir büyük alt modüle sahip değildir. N bir zayıf büyük g-tümlenmiş R-modül olsun. Bu durumda her sonlu N-üretilmiş R-modül zayıf büyük g-tümlenmiştir. R bir halka olsun. Bu durumda $_RR$ modülünün zayıf büyük g-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş R-modülün zayıf büyük g-tümlenmiş olmasıdır. N bir R-modül olsun. Eğer N modülünün her büyük alt modülü β_g^* bağıntısı ile N'de bir zayıf g-tümleyen alt modüle denkse N modülü zayıf büyük g-tümlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Büyük Alt Modüller, Küçük Alt Modüller, Tümlenmiş Modüller, G-Tümlenmiş Modüller.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada bütün halkalar birimli ve bütün modüller üniter sol modüllerdir. R bir halka ve N bir R-modül olsun. N modülünün bir K alt modülünü $K\leq N$ ile göstereceğiz. N bir R-modül ve $K\leq N$ olsun. Eğer $N=K+L$ koşulunu sağlayan N modülünün her L alt modülü için $L=N$ ise K'ya N modülünün bir *küçük* alt modülü denir ve $K<<N$ ile ifade edilir. Bir N R-modülünün bir L alt modülü için eğer $K\neq 0$ olan her $K\leq N$ için $K\cap L\neq 0$ ise, bir başka deyişle $K\cap L=0$ olan her $K\leq N$ için $K=0$ ise L'ye N modülünün bir *büyük* alt modülü denir ve $L\trianglelefteq N$ ile ifade edilir. N bir R-modül ve $K\leq N$ olmak üzere eğer N/K sonlu

üretilmiş ise K'ya N'nin bir *dual sonlu* alt modülü denir. N bir R-modül ve U, $V\leq N$ olsun. Eğer $N=U+V$ ve V bu özellikte minimal ise V'ye U'nun N'de bir *tümleyeni* denir. V modülünün U'nun N'de bir tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $N=U+V$ ve $U\cap V<<V$ olmasıdır. Eğer N'nin her alt modülü N'de bir tümleyene sahipse N'ye bir *tümlenmiş* modül denir. Eğer N'nin her dual sonlu alt modülü N'de bir tümleyene sahipse N'ye bir *dual sonlu tümlenmiş* modül denir. Eğer N'nin her büyük alt modülü N'de bir tümleyene sahipse N modülüne bir *büyük tümlenmiş* (veya kısaca *e-tümlenmiş*) modül denir. Eğer N'nin her dual sonlu büyük alt modülü N'de bir tümleyene sahipse N'ye bir *dual sonlu büyük tümlenmiş* (veya kısaca *dual sonlu e-tümlenmiş*) modül denir. N bir R-modül ve $U\leq N$ olsun. Eğer $N=U+V$ olan her $V\leq N$ için U'nun $V'\leq V$ koşuluna uyan bir V' tümleyeni varsa U, N'de *bol tümleyenlere sahiptir* denir. Eğer N'nin her alt modülü N'de bol tümleyenlere sahipse N'ye bir *bol tümlenmiş* modül denir. N bir R-modül ve U, $V\leq M$ olsun. Eğer $N=U+V$ ve $U\cap V<<M$ ise V'ye U'nun N'de bir *zayıf tümleyeni* denir. Eğer N'nin her alt modülü N'de bir zayıf tümleyene sahipse N'ye bir *zayıf tümlenmiş* modül denir. Eğer N modülünün her büyük alt modülü N içinde bir zayıf tümleyene sahipse N modülüne bir *zayıf büyük tümlenmiş* (veya kısaca *zayıf e-tümlenmiş*) modül denir. N bir R-modül ve $L\leq N$ olsun. Eğer $L+T=N$ olan her $T\trianglelefteq N$ için $T=N$ ise L'ye N'nin bir *genelleştirilmiş küçük* (veya kısaca *g-küçük*) alt modülü denir ve $L<<_g N$ ile ifade edilir. N bir R-modül ve U, $V\leq N$ olsun. Eğer $N=U+V$ ve $N=U+T$ koşuluna uyan her $T\trianglelefteq V$ için $T=V$ ise V'ye U'nun N'de bir *g-tümleyeni* denir. V modülünün U'nun N'de bir g-tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M=U+V$ ve $U\cap V<<_g V$ olmasıdır. Eğer N'nin her alt modülü N'de bir g-tümleyene sahipse N'ye bir *g-tümlenmiş* modül denir. Eğer N'nin her dual sonlu alt modülü N'de bir g-tümleyene sahipse N'ye bir *dual sonlu g-tümlenmiş* modül denir. Eğer N'nin her büyük alt modülü N'de bir g-tümleyene sahipse N'ye bir *büyük g-tümlenmiş* (veya kısaca *ge-tümlenmiş*) modül denir. N bir R-modül ve $U\leq N$ olsun. Eğer $N=U+V$ olan her $V\leq N$ için U'nun $V'\leq V$ koşuluna uyan bir V' g-tümleyeni varsa U, N'de *bol g-tümleyenlere sahiptir* denir. Eğer N'nin her alt modülü N'de bol g-tümleyenlere sahipse N'ye bir *bol g-tümlenmiş* modül denir. N bir R-modül ve U, $V\leq N$ olsun. Eğer $N=U+V$ ve $U\cap V<<_g N$ ise V'ye U'nun N'de bir *zayıf g-tümleyeni* denir. Eğer N'nin her alt modülü N'de bir zayıf g-tümleyene sahipse N'ye bir *zayıf g-tümlenmiş* modül denir. N modülünün bütün maksimal alt modüllerinin kesişimine N'nin *radikali* denir ve $RadN$ ile gösterilir. Eğer N'nin hiçbir maksimal alt modülü yoksa bu durumda $RadN=N$ olarak tanımlanır. N'nin bütün büyük maksimal alt modüllerinin kesişimine de N'nin *genelleştirilmiş radikali* denir ve $Rad_g N$ ile ifade edilir. Eğer N'nin hiçbir büyük maksimal alt modülü yoksa bu durumda $Rad_g N=N$ olarak tanımlanır. N bir R-modül olsun. Eğer N'nin her öz alt modülü N'de (genelleştirilmiş) küçük ise N'ye bir (*genelleştirilmiş*) *oyuk* modül denir. Eğer N'nin bütün öz alt modüllerini içeren bir en geniş alt modülü varsa N'ye bir *lokal* modül denir. N bir R-modül ve A, $B\leq N$ olsun. Eğer $A+K=N$ koşulunu sağlayan her $K\leq N$ için $B+K=N$ ve $B+T=N$ koşulunu sağlayan her $T\leq N$ için $A+T=N$ ise A modülü N'de β^* bağıntısı ile B modülüne *denktir* denir ve $A\beta^*B$ ile ifade edilir. N bir R-modül ve $A\leq B\leq M$ olsun. Eğer $B/A<<N/A$ ise B modülü N'de A modülü *üzerindedir* denir. N bir R-modül ve $A\leq B\leq N$ olsun. Bu durumda B'nin N'de A üzerinde olması için gerek ve yeter koşul $A\beta^*B$ olmasıdır. N bir R-modül ve A, $B\leq N$ olsun. Eğer $A+K=N$ koşulunu sağlayan her $K\trianglelefteq N$ için $B+K=N$ ve $B+T=N$ koşulunu sağlayan her $T\trianglelefteq N$ için $A+T=N$ ise A modülü N'de β_g^* bağıntısı ile B modülüne *denktir* denir ve $A\beta_g^*B$ ile ifade edilir.

Tümlenmiş modüller ayrıntılı olarak [3], [11] ve [12] numaralı kaynaklarda verilmiştir. β^* bağıntısı [2] numaralı kaynakta ve β_g^* bağıntısı da [8] numaralı kaynakta incelenmiştir. Dual sonlu tümlenmiş modüllerle ilgili detaylı bilgiler [1] numaralı kaynakta, dual sonlu büyük tümlenmiş modüllerle ilgili detaylı bilgiler de [4] numaralı kaynakta verilmiştir. G-tümlenmiş modüller [5] numaralı kaynakta, zayıf g-tümlenmiş modüller de [7] numaralı kaynakta verilmiş ve incelenmiştir. Büyük tümlenmiş modüller [9] numaralı kaynakta, zayıf büyük tümlenmiş modüller de [6] numaralı kaynakta verilmiştir. Büyük tümlenmiş modüllerden daha genel yapıda olan büyük g-tümlenmiş modüller [10] numaralı kaynakta incelenmiştir.

Lemma 1.1. M bir R-modül ve K, $N\leq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) $K\leq N$ ve $N<<_g M$ ise $K<<_g M$ olur.

(2) $K\leq N$ ve $K<<_g N$ ise $K<<_g M$ olur.

(3) T bir R-modül olmak üzere f: $M\to T$ bir R-modül homomorfizması ve $K<<_g M$ ise $f(K)<<_g T$ olur.

(4) $K<<_g M$ ise $(K+N)/N<<_g M/N$ olur.

(5) L, $T\leq M$ olmak üzere $K<<_g L$ ve $N<<_g T$ ise $K+N<<_g L+T$ olur.

İspat. [5]'e bakınız.

Lemma 1.2. M bir R-modül olmak üzere $Rad_g M = \sum_{L\ll_g M} L$ olur.

İspat. [5]'e bakınız.

2. ZAYIF BÜYÜK G-TÜMLENMİŞ MODÜLLER

Tanım 2.1. N bir R-modül olsun. Eğer N'nin her büyük alt modülünün N'de bir g-tümleyeni varsa N'ye bir *zayıf büyük g-tümlenmiş* (veya kısaza *weg-tümlenmiş*) modül denir.

Kolayca biz görebiliriz ki her zayıf g-tümlenmiş modül ve her büyük g-tümlenmiş modül zayıf büyük g-tümlenmiştir. Dolayısıyla zayıf büyük g-tümlenmiş modül, zayıf g-tümlenmiş ve büyük g-tümlenmiş modüllerden daha genel yapıdadır. Her (genelleştirilmiş) oyuk modül ve her lokal modül de zayıf büyük g-tümlenmiştir.

Önerme 2.2. N bir zayıf büyük g-tümlenmiş R-modül olsun. Eğer N'nin sıfırdan farklı her alt modülü N'de büyük ise N modülü zayıf tümlenmiştir.

İspat. Tanımlardan açıktır.

Sonuç 2.3. N bir zayıf büyük g-tümlenmiş R-modül olsun. Eğer N'nin sıfırdan farklı her alt modülü N'de büyük ise N modülü zayıf g-tümlenmiştir.

İspat. Önerme 2.2'den açıktır.

Tanım 2.4. N bir R-modül ve $V\leq N$ olsun. Eğer V, N'de herhangibir büyük alt modülün bir zayıf g-tümleyeni ise V'ye N'de bir *zayıf büyük g-tümleyen* (veya kısaca *weg-tümleyen*) alt modül denir.

Önerme 2.5. N bir R-modül olsun. Eğer N'nin her büyük alt modülü N'de bir zayıf g-tümleyen ise N modülü weg-tümlenmiştir.

İspat. U, N'nin bir büyük alt modülü olsun. Hipotezden U, N'de bir zayıf g-tümleyen olup N'nin öyle V alt modülü vardır ki U, V'nin N'de bir zayıf g-tümleyeni olur. Bu durumda $N=U+V$ ve $U\cap V<<_g N$ olur. O halde V, U'nun M'de bir zayıf g-tümleyeni olur. Böylece M weg-tümlenmiş olur.

Sonuç 2.6. N bir R-modül olsun. Eğer N'nin her büyük alt modülü N'de bir weg-tümleyen ise N modülü weg-tümlenmiştir.

İspat. Önerme 2.5'den açıktır.

Önerme 2.7. N bir weg-tümlenmiş R-modül olsun. Bu durumda $N/Rad_g N$ hiçbir büyük öz alt modüle sahip değildir.

İspat. $U/Rad_g N$, $N/Rad_g N$ modülünün bir büyük alt modülü olsun. Bu durumda $U\trianglelefteq N$ olup N weg-tümlenmiş olduğundan U'nun N'de bir V zayıf g-tümleyeni vardır. Burada $N=U+V$ ve $U\cap V<<_g N$

olur. O halde $N/Rad_gN=(U+V)/Rad_gN=U/Rad_gN+(V+Rad_gN)/Rad_gN$ ve $(U/Rad_gN)\cap((V+Rad_gN)/Rad_gN)=(U\cap V+Rad_gN)/Rad_gN=0$ olup $N/Rad_gN=U/Rad_gN\oplus(V+Rad_gN)/Rad_gN$ olur. Burada $U/Rad_gN\trianglelefteq N/Rad_gN$ olduğundan $U/Rad_gN=N/Rad_gN$ olup N/Rad_gN hiçbir büyük alt modüle sahip değildir.

Lemma 2.8. N bir R-modül, $U\trianglelefteq N$ ve $K\leq N$ olsun. Eğer K weg-tümlenmiş ve $U+K$, N'de bir zayıf g-tümleyene sahipse U da N'de bir zayıf g-tümleyene sahiptir.

İspat. X, $U+K$'nın N'de bir zayıf g-tümleyeni olsun. Bu durumda $N=U+K+X$ ve $(U+K)\cap X<<_gN$ olur. $U\trianglelefteq N$ olduğundan $(U+X)\trianglelefteq N$ olup $(U+X)\cap K\trianglelefteq K$ olur. Burada K weg-tümlenmiş olduğundan $(U+X)\cap K$, K'da bir Y zayıf g-tümleyene sahiptir. Bu durumda $K=(U+X)\cap K+Y$ ve $(U+X)\cap Y=(U+X)\cap K\cap Y<<_gK$ olur. O halde Lemma 1.1 de göz önünde bulundurularak $N=U+K+X=U+(U+X)\cap K+Y+X=U+X+Y$ ve $U\cap(X+Y)\leq(U+Y)\cap X+(U+X)\cap Y\leq(U+K)\cap X+(U+X)\cap Y<<_gN+K=N$ olup $X+Y$, U'nun N'de bir zayıf g-tümleyeni olur.

Lemma 2.9. $N=N_1+N_2$ olsun. Eğer N_1 ve N_2 weg-tümlenmiş ise N de weg-tümlenmiştir.

İspat. $U\trianglelefteq N$ olsun. Burada 0, $U+N_1+N_2$'nin N'de bir zayıf g-tümleyeni olur. $U\trianglelefteq N$ olduğundan $(U+N_1)\trianglelefteq N$ olur. O halde N_2 weg-tümlenmiş olduğundan Lemma 2.8 gereği $U+N_1$, N'de bir zayıf g-tümleyene sahiptir. Burada N_1 weg-tümlenmiş olduğundan yine Lemma 2.8 gereği U, N'de bir zayıf g-tümleyene sahiptir. Böylece N weg-tümlenmiştir.

Sonuç 2.10. $N=N_1+N_2+\ldots+N_m$ olsun. Eğer her $i=1, 2, \ldots, m$ için N_i weg-tümlenmiş ise N de weg-tümlenmiştir.

İspat. Lemma 2.9'dan açıktır.

Lemma 2.11. Weg-tümlenmiş bir modülün her bölüm modülü de weg-tümlenmiştir.

İspat. N bir weg-tümlenmiş R-modül ve $K\leq N$ olsun. N/K modülünün weg-tümlenmiş olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $U/K\trianglelefteq N/K$ olsun. Bu durumda $U\trianglelefteq N$ olup N weg-tümlenmiş olduğundan U'nun N'de bir V zayıf g-tümleyeni vardır. V, U'nun N'de bir zayıf g-tümleyeni ve $K\leq U$ olduğundan [7, Lemma 7] gereği $(V+K)/K$, U/K'nın N/K'da bir zayıf g-tümleyeni olur. Böylece N/K weg-tümlenmiş olur.

Sonuç 2.12. Weg-tümlenmiş bir modülün her homomorfik görüntüsü de weg-tümlenmiştir.

İspat. Lemma 2.11'den açıktır.

Lemma 2.13. N bir weg-tümlenmiş R-modül olsun. Bu durumda her sonlu N-üretilmiş R-modül weg-tümlenmiştir.

İspat. M bir sonlu N-üretilmiş R-modül olsun. Bu durumda sonlu elemanlı en az bir Λ indis kümesi ve en az bir f: $N^{(\Lambda)}\to M$ R-modül epimorfizması vardır. N weg-tümlenmiş olduğundan Sonuç 2.10 gereği $N^{(\Lambda)}$ weg-tümlenmiştir. Bu durumda Sonuç 2.12 gereği M weg-tümlenmiştir. Böylece her sonlu N-üretilmiş R-modül weg-tümlenmiş olur.

Önerme 2.14. R bir halka olsun. Bu durumda ${}_RR$ sol R-modülünün weg-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş R-modülün weg-tümlenmiş olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ Lemma 2.13'den açıktır.

$(\Leftarrow)$ ${}_RR$ sonlu üretilmiş olduğundan açıktır.

Lemma 2.15. N bir R-modül olsun. Eğer N'nin her büyük alt modülü β_g^* bağıntısı ile N'de bir zayıf g-tümleyen alt modüle denkse N weg-tümlenmiştir.

İspat. U, N'nin herhangibir büyük alt modülü olsun. Hipotezden $U\beta_g{}^*K$ olacak şekilde N'de en az bir K zayıf g-tümleyen alt modül vardır. Kabul edelim ki T, N'nin bir büyük alt modülü olmak üzere K, T'nin N'de bir zayıf g-tümleyeni olsun. Bu durumda T de K'nın N'de bir zayıf g-tümleyeni olur. [8, Proposition 4(ii)] gereği T, U'nun da N'de bir zayıf g-tümleyeni olur. Böylece N weg-tümlenmiş olur.

Sonuç 2.16. N bir R-modül olsun. Eğer N'nin her büyük alt modülü β^* bağıntısı ile N'de bir zayıf g-tümleyen alt modüle denkse N weg-tümlenmiştir.

İspat. Lemma 2.15'den açıktır.

Sonuç 2.17. N bir R-modül olsun. Eğer N'nin her büyük alt modülü N'de bir zayıf g-tümleyen alt modül üzerindeyse N weg-tümlenmiştir.

İspat. Sonuç 2.16'dan açıktır.

Sonuç 2.18. N bir R-modül olsun. Eğer N'nin her büyük alt modülü N'de $\beta_g{}^*$ bağıntısı ile bir g-tümleyen alt modüle denkse N weg-tümlenmiştir.

İspat. Lemma 2.15'den açıktır.

Örnek 2.19. p ve q asal tamsayılar olmak üzere $R=\mathbb{Z}_{p,q}=\left\{\frac{a}{b}\middle|a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0,\ p\nmid b\ ve\ q\nmid b\right\}$ halkasını göz önüne alalım. [7, Example 1] gereği $_RR$ zayıf g-tümlenmiştir ancak g-tümlenmiş değildir. Burada $_RR$ weg-tümlenmiştir ancak $_RR$'nin sıfırdan farklı her alt modülü $_RR$'de büyük olduğundan büyük g-tümlenmiş değildir.

KAYNAKÇA

Alizade, R., Bilhan, G. and Smith, P. F., (2001). Modules whose Maximal Submodules have Supplements, *Communications in Algebra*, 29 No.6, 2389-2405.

Birkenmeier, G. F., Mutlu, F. T., Nebiyev, C., Sökmez, N. and Tercan, A., (2010). Goldie*-Supplemented Modules, *Glasgow Mathematical Journal*, 52A, 41-52.

Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., Wisbauer, R., (2006). *Lifting Modules Supplements and Projectivity In Module Theory*, Frontiers in Mathematics, Birkhauser, Basel.

Koşar, B. and Nebiyev, C., (2018). Cofinitely Essential Supplemented Modules, *Turkish Studies Information Technologies and Applied Sciences*, 13/29, 83-88.

Koşar, B., Nebiyev, C. and Sökmez, N., (2015). G-Supplemented Modules, *Ukrainian Mathematical Journal*, 67 No. 6, 975-980.

Nebiyev, C. and Koşar, B., (2018). Weakly Essential Supplemented Modules, *Turkish Studies Information Technologies and Applied Sciences*, 13/29, 89-94.

Nebiyev, C. and Ökten, H. H., (2017). Weakly G-Supplemented Modules, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 10 No. 3, 521-528.

Nebiyev, C. and Sökmez, N., (2018). Beta G-Star Relation on Modules, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11 No. 1, 238-243.

Nebiyev, C., Ökten, H. H. and Pekin, A., (2018). Essential Supplemented Modules, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 120 No.2, 253-257.

Ökten, H. H. and Nebiyev, C., (2019). Essential G-Supplemented Modules, *Turkish Studies Information Technologies and Applied Sciences* (Submitted).

Wisbauer, R., (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Philadelphia.

Zöschinger, H., (1974). Komplementierte Moduln Über Dedekindringen, *Journal of Algebra*, 29, 42-56.