Turkish Studies
Information Technologies and Applied Sciences
Volume 14 Issue 1, 2019, p. 83-89
DOI: 10.7827/TurkishStudies.14874
ISSN: 2667-5633
Skopje/MACEDONIA-Ankara/TURKEY

INTERNATIONAL BALKAN UNIVERSITY
EXCELLENCE FOR THE FUTURE
IBU.EDU.MK

Research Article / Araştırma Makalesi

Article Info/Makale Bilgisi

**Received/Geliş:** Ocak 2019 ✓**Accepted/Kabul:** Mart 2019

**Referees/Hakemler:** Doç. Dr. Ayten PEKİN – Dr. Öğr. Üyesi Berna KOŞAR

This article was checked by iThenticate.

# ESSENTIAL G-SUPPLEMENTED MODULES

*Hasan Hüseyin ÖKTEN* [*] - *Celil NEBİYEV* [**]

## ABSTRACT

In this work essential g-supplemented modules are defined and some properties of these modules are investigated. All modules are associative with unity and all modules are unital left modules. Let $M$ be an $R$-module. If every essential submodule of $M$ has a g-supplement in $M$, then $M$ is called an *essential g-supplemented* (or briefly *ge-supplemented*) module. Clearly we can see that every g-supplemented module is essential g-supplemented. Because of this essential g-supplemented modules are more generalized than g-supplemented modules. Every (generalized) hollow and every local module are essential g-supplemented. Let $M$ be an essential g-supplemented $R$-module. If every nonzero submodule of $M$ is essential in $M$, then $M$ is g-supplemented. It is proved that every factor module and every homomorphic image of an essential g-supplemented module are essential g-supplemented. It is also proved that the finite sum of essential g-supplemented modules is essential g-supplemented. Let $M$ be an essential g-supplemented module. Then $M/Rad_gM$ have no proper essential submodules. Let $M$ be an essential g-supplemented $R$-module. Then every finitely $M$-generated $R$-module is essential g-supplemented. Let $R$ be any ring. Then ${}_RR$ is essential g-supplemented if and only if every finitely generated $R$-module is essential g-supplemented. Let $M$ be an $R$-module. If every essential submodule of $M$ is $\beta_g^*$ equivalent to an essential g-supplement (ge-supplement) submodule in $M$, then $M$ is essential g-supplemented.

[*] Dr. Öğr. Üyesi, Amasya Üniversitesi, E-posta: hokten@gmail.com

[**] Doç. Dr., Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi, E-posta: cnebiyev@omu.edu.tr

## STRUCTURED ABSTRACT

In this work essential g-supplemented modules are defined and some properties of these modules are investigated. All modules are associative with unity and all modules are unital left modules. Let $M$ be an $R$-module. If every essential submodule of $M$ has a g-supplement in $M$, then $M$ is called an *essential g-supplemented* (or briefly *ge-supplemented*) module. Clearly we can see that every g-supplemented module is essential g-supplemented. Because of this essential g-supplemented modules are more generalized than g-supplemented modules. Every (generalized) hollow and every local module are essential g-supplemented. Let $M$ be an essential g-supplemented $R$-module. If every nonzero submodule of $M$ is essential in $M$, then $M$ is g-supplemented. As every supplemented module is g-supplemented, every essential supplemented module is essential g-supplemented. It is proved that every factor module and every homomorphic image of an essential g-supplemented module are essential g-supplemented. Because of this essential g-supplemented modules is more generalized than essential supplemented modules. Let $M$ be an $R$-module, $U \trianglelefteq M$ and $N \leq M$. If $N$ is essential g-supplemented and $U+N$ has a g-supplement in $M$, then $U$ has also a g-supplement in $M$. By using this we prove that the finite sum of essential g-supplemented modules is essential g-supplemented. Let $M$ be an essential g-supplemented module. Then $M/Rad_gM$ have no proper essential submodules. Let $M$ be an essential g-supplemented $R$-module. Then every finitely $M$-generated $R$-module is essential g-supplemented. By using this we can prove the following Proposition: 'Let $R$ be any ring. Then ${}_RR$ is essential g-supplemented if and only if every finitely generated $R$-module is essential g-supplemented'. Let $M$ be an $R$-module and $V \leq M$. If $V$ is a g-supplement of an essential submodule in $M$, then $V$ is called an *essential g-supplement* (or briefly *ge-supplement*) submodule in $M$. Let $M$ be an $R$-module. If every essential submodule of $M$ is $\beta_g^*$ equivalent to an essential g-supplement (ge-supplement) submodule in $M$, then $M$ is essential g-supplemented. By using this we can give following corollaries.

**Corollary:** Let $M$ be an $R$-module. If every essential submodule of $M$ is $\beta^*$ equivalent to an essential g-supplement (ge-supplement) submodule in $M$, then $M$ is essential g-supplemented.

**Corollary:** Let $M$ be an $R$-module. If every essential submodule of $M$ lies above an essential g-supplement (ge-supplement) submodule in $M$, then $M$ is essential g-supplemented.

**Corollary:** Let $M$ be an $R$-module. If every essential submodule of $M$ is $\beta_g^*$ equivalent to a supplement submodule that is a supplement an essential submodule in $M$, then $M$ is essential g-supplemented.

**Keywords:** Essential Submodules, Small Submodules, Supplemented Modules, G-Supplemented Modules.

**2010 Mathematics Subject Classification:** 16D10, 16D70.

## BÜYÜK G-TÜMLENMİŞ MODÜLLER


### ÖZET

Bu çalışmada büyük g-tümlenmiş modüller tanımlandı ve bu modüllerle ilgili birtakım özellikler incelendi. Bu çalışmada ayrıca bütün halkalar birimli ve bütün modüller de üniter sol modüllerdir. $M$ bir $R$-modül olsun. Eğer $M$ modülünün her büyük alt modülü $M$ içinde bir g-tümleyeni varsa $M$ modülüne bir *büyük g-tümlenmiş* modül denir. Açıkça biz görebiliriz ki her g-tümlenmiş modül büyük g-tümlenmiştir. Bundan dolayı büyük g-tümlenmiş modüller g-tümlenmiş modüllerden daha genel yapıdadırlar. Her (genelleştirilmiş) oyuk ve her lokal modül büyük g-tümlenmiştir. $M$ bir büyük g-tümlenmiş $R$-modül olsun. Eğer $M$ modülünün sıfırdan farklı her alt modülü $M$ modülünde büyükse $M$ modülü g-tümlenmiştir. Bir büyük g-tümlenmiş modülün her bölüm modülü ve her homomorfik görüntüsünün de büyük g-tümlenmiş olduğu ispatlandı. Ayrıca büyük g-tümlenmiş modüllerin sonlu toplamının da büyük g-tümlenmiş olduğu gösterildi. $M$ bir büyük g-tümlenmiş modül olsun. Bu durumda $M/Rad_gM$ modülü hiçbir büyük alt modüle sahip değildir. $M$ bir büyük g-tümlenmiş $R$-modül olsun. Bu durumda her sonlu $M$-üretilmiş $R$-modül büyük g-tümlenmiştir. $R$ bir halka olsun. Bu durumda $_RR$ modülünün büyük g-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş $R$-modülün büyük g-tümlenmiş olmasıdır. $M$ bir $R$-modül olsun. Eğer $M$ modülünün her büyük alt modülü $\beta_g^*$ bağıntısı ile $M$'de bir büyük g-tümleyen alt modüle denkse $M$ modülü büyük g-tümlenmiştir.


**Anahtar Kelimeler:** Büyük Alt Modüller, Küçük Alt Modüller, Tümlenmiş Modüller, G-Tümlenmiş Modüller.

## 1. GİRİŞ

Bu çalışmada bütün halkalar birimli ve bütün modüller üniter sol modüllerdir. $R$ bir halka ve $M$ bir $R$-modül olsun. $M$ modülünün bir $N$ alt modülünü $N\leq M$ ile göstereceğiz. $M$ bir $R$-modül ve $N\leq M$ olsun. Eğer $M=N+L$ koşulunu sağlayan $M$ modülünün her $L$ alt modülü için $L=M$ ise $N$'ye $M$ modülünün bir *küçük* alt modülü denir ve $N<<M$ ile ifade edilir. Bir $M$ $R$-modülünün bir $N$ alt modülü için eğer $K\neq 0$ olan her $K\leq M$ için $K\cap N\neq 0$ ise, bir başka deyişle $K\cap N=0$ olan her $K\leq M$ için $K=0$ ise $N$'ye $M$ modülünün bir *büyük* alt modülü denir ve $N\trianglelefteq M$ ile ifade edilir. $M$ bir $R$-modül ve $K\leq M$ olmak üzere eğer $M/K$ sonlu üretilmiş ise $K$'ya $M$'nin bir *dual sonlu* alt modülü denir. $M$ bir $R$-modül ve $U, V\leq M$ olsun. Eğer $M=U+V$ ve $V$ bu özellikte minimal ise $V$'ye $U$'nun $M$'de bir *tümleyeni* denir. $V$ modülünün $U$'nun $M$'de bir tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M=U+V$ ve $U\cap V<<V$ olmasıdır. Eğer $M$'nin her alt modülü $M$'de bir tümleyene sahipse $M$'ye bir *tümlenmiş* modül denir. Eğer $M$'nin her dual sonlu alt modülü $M$'de bir tümleyene sahipse $M$'ye bir *dual sonlu tümlenmiş* modül denir. Eğer $M$'nin her büyük alt modülü $M$'de bir tümleyene sahipse $M$ modülüne bir *büyük tümlenmiş* (veya kısaca *e-tümlenmiş*) modül denir. Eğer $M$'nin her dual sonlu büyük alt modülü $M$'de bir tümleyene sahipse $M$'ye bir *dual sonlu büyük tümlenmiş* (veya kısaca dual sonlu *e-tümlenmiş*) modül denir. $M$ bir $R$-modül ve $U\leq M$ olsun. Eğer $M=U+V$ olan her $V\leq M$ için $U$'nun $V'\leq V$ koşuluna uyan bir $V'$ tümleyeni varsa $U$, $M$'de *bol tümleyenlere sahiptir* denir. Eğer $M$'nin her alt modülü $M$'de bol tümleyenlere sahipse $M$'ye bir *bol tümlenmiş* modül denir. $M$ bir $R$-modül ve $U, V\leq M$ olsun. Eğer $M=U+V$ ve $U\cap V<<M$ ise $V$'ye $U$'nun $M$'de bir *zayıf tümleyeni* denir. Eğer $M$'nin her alt modülü $M$'de bir zayıf tümleyene sahipse $M$'ye bir *zayıf tümlenmiş* modül denir. Eğer $M$ modülünün her büyük alt modülü $M$ içinde bir zayıf tümleyene sahipse $M$

modülüne bir *zayıf büyük tümlenmiş* (veya kısaca *zayıf e-tümlenmiş*) modül denir. $M$ bir $R$-modül ve $K\leq M$ olsun. Eğer $K+T=M$ olan her $T\trianglelefteq M$ için $T=M$ ise $K$'ya $M$'nin bir *genelleştirilmiş küçük* (veya kısaca *g-küçük*) alt modülü denir ve $K<<_g M$ ile ifade edilir. $M$ bir $R$-modül ve $U$, $V\leq M$ olsun. Eğer $M=U+V$ ve $M=U+T$ koşuluna uyan her $T\trianglelefteq V$ için $T=V$ ise $V$'ye $U$'nun $M$'de bir *g-tümleyeni* denir. $V$ modülünün $U$'nun $M$'de bir g-tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M=U+V$ ve $U\cap V<<_g V$ olmasıdır. Eğer $M$'nin her alt modülü $M$'de bir g-tümleyene sahipse $M$'ye bir *g-tümlenmiş* modül denir. Eğer $M$'nin her dual sonlu alt modülü $M$'de bir g-tümleyene sahipse $M$'ye bir *dual sonlu g-tümlenmiş* modül denir. $M$ bir $R$-modül ve $U\leq M$ olsun. Eğer $M=U+V$ olan her $V\leq M$ için $U$'nun $V'\leq V$ koşuluna uyan bir $V'$ g-tümleyeni varsa $U$, $M$'de *bol g-tümleyenlere sahiptir* denir. Eğer $M$'nin her alt modülü $M$'de bol g-tümleyenlere sahipse $M$'ye bir *bol g-tümlenmiş* modül denir. $M$ bir $R$-modül ve $U$, $V\leq M$ olsun. Eğer $M=U+V$ ve $U\cap V<<_g M$ ise $V$'ye $U$'nun $M$'de bir *zayıf g-tümleyeni* denir. Eğer $M$'nin her alt modülü $M$'de bir zayıf g-tümleyene sahipse $M$'ye bir *zayıf g-tümlenmiş* modül denir. $M$ modülünün bütün maksimal alt modüllerinin kesişimine $M$'nin *radikali* denir ve $RadM$ ile gösterilir. Eğer $M$'nin hiçbir maksimal alt modülü yoksa bu durumda $RadM=M$ olarak tanımlanır. $M$'nin bütün büyük maksimal alt modüllerinin kesişimine de $M$'nin *genelleştirilmiş radikali* denir ve $Rad_g M$ ile ifade edilir. Eğer $M$'nin hiçbir büyük maksimal alt modülü yoksa bu durumda $Rad_g M=M$ olarak tanımlanır. $M$ bir $R$-modül olsun. Eğer $M$'nin her öz alt modülü $M$'de (genelleştirilmiş) küçük ise $M$'ye bir (*genelleştirilmiş*) *oyuk* modül denir. Eğer $M$'nin bütün öz alt modüllerini içeren bir en geniş alt modülü varsa $M$'ye bir *lokal* modül denir. $M$ bir $R$-modül ve $A$, $B\leq M$ olsun. Eğer $A+K=M$ koşulunu sağlayan her $K\leq M$ için $B+K=M$ ve $B+T=M$ koşulunu sağlayan her $T\leq M$ için $A+T=M$ ise $A$ modülü $M$'de $\beta^*$ bağıntısı ile $B$ modülüne *denktir* denir ve $A\beta^*B$ ile ifade edilir. $M$ bir $R$-modül ve $A\leq B\leq M$ olsun. Eğer $B/A<<M/A$ ise $B$ modülü $M$'de $A$ modülü *üzerindedir* denir. $M$ bir $R$-modül ve $A\leq B\leq M$ olsun. Bu durumda $B$'nin $M$'de $A$ üzerinde olması için gerek ve yeter koşul $A\beta^*B$ olmasıdır. $M$ bir $R$-modül ve $A$, $B\leq M$ olsun. Eğer $A+K=M$ koşulunu sağlayan her $K\trianglelefteq M$ için $B+K=M$ ve $B+T=M$ koşulunu sağlayan her $T\trianglelefteq M$ için $A+T=M$ ise $A$ modülü $M$'de $\beta_g^*$ bağıntısı ile $B$ modülüne *denktir* denir ve $A\beta_g^*B$ ile ifade edilir.

Tümlenmiş modüller ayrıntılı olarak [3], [11] ve [12] numaralı kaynaklarda verilmiştir. $\beta^*$ bağıntısı [2] numaralı kaynakta ve $\beta_g^*$ bağıntısı da [9] numaralı kaynakta verilmiştir. Dual sonlu tümlenmiş modüllerle ilgili detaylı bilgiler [1] numaralı kaynakta, dual sonlu büyük tümlenmiş modüllerle ilgili detaylı bilgiler de [4] numaralı kaynakta verilmiştir. G-tümlenmiş modüller [5] numaralı kaynakta, zayıf g-tümlenmiş modüller de [8] numaralı kaynakta verilmiştir. G-tümleyen alt modüllerle ilgili detaylı bilgiler [6] numaralı kaynakta da verilmiştir. Büyük tümlenmiş modüller [10] numaralı kaynakta, zayıf büyük tümlenmiş modüller de [7] numaralı kaynakta verilmiştir.

**Lemma 1.1.** $M$ bir $R$-modül ve $K$, $N\leq M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) $K\leq N$ ve $N<<_g M$ ise $K<<_g M$ olur.

(2) $K\leq N$ ve $K<<_g N$ ise $K<<_g M$ olur.

(3) $T$ bir $R$-modül olmak üzere $f$: $M\rightarrow T$ bir $R$-modül homomorfizması ve $K<<_g M$ ise $f(K)<<_g T$ olur.

(4) $K<<_g M$ ise $(K+N)/N<<_g M/N$ olur.

(5) $L$, $T\leq M$ olmak üzere $K<<_g L$ ve $N<<_g T$ ise $K+N<<_g L+T$ olur.

**İspat.** [5]'e bakınız.

**Lemma 1.2.** $M$ bir $R$-modül olmak üzere $Rad_g M = \sum_{L\ll_g M} L$ olur.

**İspat.** [5]'e bakınız.

## 2. BÜYÜK G-TÜMLENMİŞ MODÜLLER

**Tanım 2.1.** $M$ bir $R$-modül olsun. Eğer $M$'nin her büyük alt modülü $M$'de bir g-tümleyene sahipse $M$'ye bir *büyük g-tümlenmiş* modül denir.

Kolayca biz görebiliriz ki her g-tümlenmiş modül büyük g-tümlenmiştir. Her (genelleştirilmiş) oyuk modül ve her lokal modül büyük g-tümlenmiştir.

**Önerme 2.2.** $M$ bir büyük g-tümlenmiş $R$-modül olsun. Eğer $M$'nin sıfırdan farklı her alt modülü $M$'de büyük ise $M$ modülü g-tümlenmiştir.

**İspat.** Tanımlardan açıktır.

**Tanım 2.3.** $M$ bir $R$-modül ve $V \leq M$ olsun. Eğer $V$, $M$'de herhangibir büyük alt modülün bir g-tümleyeni ise $V$'ye $M$'de bir *büyük g-tümleyen* alt modül denir.

**Önerme 2.4.** $M$ bir $R$-modül olsun. Eğer $M$'nin her büyük alt modülü $M$'de bir büyük g-tümleyen ise $M$ büyük g-tümlenmiştir.

**İspat.** $U$, $M$'nin bir büyük alt modülü olsun. Hipotezden $M$'nin öyle büyük $V$ alt modülü vardır ki $U$, $V$'nin $M$'de bir g-tümleyeni olur. Bu durumda $M=U+V$ ve $U\cap V<<_g U$ olur. Lemma 1.1(1) gereği $U\cap V<<_g M$ olur. Hipotezden $V$, $M$'de bir büyük tümleyen alt modüldür. O halde [6, Lemma 2.3] gereği $U\cap V<<_g V$ olup ayrıca $M=U+V$ olduğundan $V$, $U$'nun $M$'de bir g-tümleyeni olur. Böylece $M$ büyük g-tümlenmiş olur.

**Önerme 2.5.** $M$ bir büyük g-tümlenmiş $R$-modül olsun. Bu durumda $M/Rad_gM$ hiçbir büyük öz alt modüle sahip değildir.

**İspat.** $U/Rad_gM$, $M/Rad_gM$ modülünün bir büyük alt modülü olsun. Bu durumda $U\trianglelefteq M$ olup $M$ büyük g-tümlenmiş olduğundan $U$'nun $M$'de bir $V$ g-tümleyeni vardır. Burada $M=U+V$ ve $U\cap V<<_g V$ olur. $U\cap V<<_g V$ olduğundan Lemma 1.1(2) gereği $U\cap V<<_g M$ olup Lemma 1.2 gereği $U\cap V\leq Rad_gM$ olur. Böylece $M/Rad_gM=(U+V)/Rad_gM=U/Rad_gM+(V+Rad_gM)/Rad_gM$ ve $(U/Rad_gM)\cap((V+Rad_gM)/Rad_gM)=(U\cap V+Rad_gM)/Rad_gM=0$ olup $M/Rad_gM=U/Rad_gM\oplus(V+Rad_gM)/Rad_gM$ olur. Burada $U/Rad_gM\trianglelefteq M/Rad_gM$ olduğundan $U/Rad_gM=M/Rad_gM$ olup $M/Rad_gM$ hiçbir büyük alt modüle sahip değildir.

**Lemma 2.6.** $M$ bir $R$-modül, $U\trianglelefteq M$ ve $N\leq M$ olsun. Eğer $N$ büyük g-tümlenmiş ve $U+N$, $M$'de bir g-tümleyene sahipse $U$ da $M$'de bir g-tümleyene sahiptir.

**İspat.** $X$, $U+N$'nin $M$'de bir g-tümleyeni olsun. Bu durumda $M=U+N+X$ ve $(U+N)\cap X<<_g X$ olur. $U\trianglelefteq M$ olduğundan $(U+X)\trianglelefteq M$ olup $(U+X)\cap N\trianglelefteq N$ olur. Burada $N$ büyük g-tümlenmiş olduğundan $(U+X)\cap N$, $N$'de bir $Y$ g-tümleyene sahiptir. Bu durumda $N=(U+X)\cap N+Y$ ve $(U+X)\cap Y=(U+X)\cap N\cap Y<<_g Y$ olur. O halde $M=U+N+X=U+(U+X)\cap N+Y+X=U+X+Y$ ve $U\cap(X+Y)\leq(U+Y)\cap X+(U+X)\cap Y\leq(U+N)\cap X+(U+X)\cap Y<<_g X+Y$ olup $X+Y$, $U$'nun $M$'de bir g-tümleyeni olur.

**Lemma 2.7.** $M=M_1+M_2$ olsun. Eğer $M_1$ ve $M_2$ büyük g-tümlenmiş ise $M$ de büyük g-tümlenmiştir.

**İspat.** $U\trianglelefteq M$ olsun. Burada 0, $U+M_1+M_2$'nin $M$'de bir g-tümleyeni olur. $U\trianglelefteq M$ olduğundan $(U+M_1)\trianglelefteq M$ olur. O halde $M_2$ büyük g-tümlenmiş olduğundan Lemma 2.6 gereği $U+M_1$, $M$'de bir g-tümleyene sahiptir. Burada $M_1$ büyük g-tümlenmiş olduğundan yine Lemma 2.6 gereği $U$, $M$'de bir g-tümleyene sahiptir. Böylece $M$ büyük g-tümlenmiştir.

**Sonuç 2.8.** $M=M_1+M_2+\ldots+M_n$ olsun. Eğer her $i=1, 2, \ldots, n$ için $M_i$ büyük g-tümlenmiş ise $M$ de büyük g-tümlenmiştir.

**İspat.** Lemma 2.7'den açıktır.

**Lemma 2.9.** Büyük g-tümlenmiş bir modülün her bölüm modülü de büyük g-tümlenmiştir.

**İspat.** $M$ bir büyük g-tümlenmiş $R$-modül ve $K \leq M$ olsun. $M/K$ modülünün büyük g-tümlenmiş olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $U/K \trianglelefteq M/K$ olsun. Bu durumda $U \trianglelefteq M$ olup $M$ büyük g-tümlenmiş olduğundan $U$'nun $M$'de bir $V$ g-tümleyeni vardır. $V$, $U$'nun $M$'de bir g-tümleyeni ve $K \leq U$ olduğundan [5, Lemma 4] gereği $(V+K)/K$, $U/K$'nın $M/K$'da bir g-tümleyeni olur. Böylece $M/K$ büyük g-tümlenmiş olur.

**Sonuç 2.10.** Büyük g-tümlenmiş bir modülün her homomorfik görüntüsü de büyük g-tümlenmiştir.

**İspat.** Lemma 2.9'dan açıktır.

**Lemma 2.11.** $M$ bir büyük g-tümlenmiş $R$-modül olsun. Bu durumda her sonlu $M$-üretilmiş $R$-modül büyük g-tümlenmiştir.

**İspat.** $N$ bir sonlu $M$-üretilmiş $R$-modül olsun. Bu durumda sonlu elemanlı öyle $\Lambda$ indis kümesi vardır ki $f$: $M^{(\Lambda)} \rightarrow N$ $R$-modül epimorfizması bulunabilir. $M$ büyük g-tümlenmiş olduğundan Sonuç 2.8 gereği $M^{(\Lambda)}$ büyük g-tümlenmiş olur. Bu durumda Sonuç 2.10 gereği $N$ büyük g-tümlenmiş olur. Böylece her sonlu $M$-üretilmiş $R$-modül büyük g-tümlenmiş olur.

**Önerme 2.12.** $R$ bir halka olsun. Bu durumda ${}_RR$ sol $R$-modülünün büyük g-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş $R$-modülün büyük g-tümlenmiş olmasıdır.

**İspat.** ($\Rightarrow$) Lemma 2.11'den açıktır.

($\Leftarrow$) ${}_RR$ sonlu üretilmiş olduğundan açıktır.

**Lemma 2.13.** $M$ bir $R$-modül olsun. Eğer $M$'nin her büyük alt modülü $\beta_g^*$ bağıntısı ile $M$'de bir büyük g-tümleyen alt modüle denkse $M$ büyük g-tümlenmiştir.

**İspat.** $U$, $M$'nin herhangibir büyük alt modülü olsun. Hipotezden öyle $K \leq M$ vardır ki $K$ modülü $M$'de bir $T$ büyük alt modülün bir g-tümleyeni ve $U \beta_g^* K$ olur. $K$, $T$'nin $M$'de bir g-tümleyeni olduğundan $T$, $K$'nın $M$'de bir zayıf g-tümleyeni olur. Bu durumda [9, Proposition 4(ii)] gereği $T$, $U$'nun da $M$'de bir zayıf g-tümleyeni olur. Aynı zamanda $U$ da $T$'nin $M$'de bir zayıf g-tümleyeni olur. $T \trianglelefteq M$ olduğundan hipotezden öyle $V \leq M$ vardır ki $V$ modülü $M$'de bir $L$ büyük alt modülün bir g-tümleyeni ve $T \beta_g^* V$ olur. Burada [9, Proposition 4(ii)] gereği $U$, $V$'nin $M$'de bir zayıf g-tümleyeni olup $M=U+V$ ve $U \cap V \ll_g M$ olur. [6, Lemma 2.3] gereği $U \cap V \ll_g V$ olup $V$, $U$'nun $M$'de bir g-tümleyeni olur. Böylece $M$ büyük g-tümlenmiş olur.

**Sonuç 2.14.** $M$ bir $R$-modül olsun. Eğer $M$'nin her büyük alt modülü $\beta^*$ bağıntısı ile $M$'de bir büyük g-tümleyen alt modüle denkse $M$ büyük g-tümlenmiştir.

**İspat.** Lemma 2.13'den açıktır.

**Sonuç 2.15.** $M$ bir $R$-modül olsun. Eğer $M$'nin her büyük alt modülü $M$'de bir büyük g-tümleyen alt modül üzerindeyse $M$ büyük g-tümlenmiştir.

**İspat.** Sonuç 2.14'den açıktır.

**Sonuç 2.16.** $M$ bir $R$-modül olsun. Eğer $M$'nin her büyük alt modülü $M$'de $\beta_g^*$ bağıntısı ile bir büyük alt modülün bir tümleyenine denkse $M$ büyük g-tümlenmiştir.

**İspat.** Lemma 2.13'den açıktır.

**Not:** Bu çalışma Amasya Üniversitesi tarafından FBM-BAP 18-0377 numaralı proje ile desteklenmiştir.

**REFERENCES**

Alizade, R., Bilhan, G. and Smith, P. F., (2001). Modules whose Maximal Submodules have Supplements, *Communications in Algebra*, 29 No.6, 2389-2405.

Birkenmeier, G. F., Mutlu, F. T., Nebiyev, C., Sökmez, N. and Tercan, A., (2010). Goldie*-Supplemented Modules, *Glasgow Mathematical Journal*, 52A, 41-52.

Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., Wisbauer, R., (2006). *Lifting Modules Supplements and Projectivity In Module Theory*, Frontiers in Mathematics, Birkhauser, Basel.

Koşar, B. and Nebiyev, C., (2018). Cofinitely Essential Supplemented Modules, *Turkish Studies Information Technologies and Applied Sciences*, 13/29, 83-88.

Koşar, B., Nebiyev, C. and Sökmez, N., (2015). G-Supplemented Modules, *Ukrainian Mathematical Journal*, 67 No. 6, 975-980.

Nebiyev, C., (2017). On a Generalization of Supplement Submodules, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 113 No. 2, 283-289.

Nebiyev, C. and Koşar, B., (2018). Weakly Essential Supplemented Modules, *Turkish Studies Information Technologies and Applied Sciences*, 13/29, 89-94.

Nebiyev, C. and Ökten, H. H., (2017). Weakly G-Supplemented Modules, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 10 No. 3, 521-528.

Nebiyev, C. and Sökmez, N., (2018). Beta G-Star Relation on Modules, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11 No. 1, 238-243.

Nebiyev, C., Ökten, H. H. and Pekin, A., (2018). Essential Supplemented Modules, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 120 No.2, 253-257.

Wisbauer, R., (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Philadelphia.

Zöschinger, H., (1974). Komplementierte Moduln Über Dedekindringen, *Journal of Algebra*, 29, 42-56.